PART2　接線の方程式

2 (1) 曲線 $y=x^3-5x+1$ 上の点 A$(2,\ -1)$ における接線の方程式，および法線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(1,\ 8)$ から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ。また，求めた接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の座標を求めよ。

Point Pickup

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における

接線の方程式　$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

法線の方程式　$y=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$　　ただし　$f'(a)\neq 0$

(2) 接点の座標を $(a,\ f(a))$ とおき，接線の方程式を a を用いて表す。

第 14 講　PART2　確認問題

1 曲線 $y=-2x^3-x^2+1$ 上の点 A$(-1,\ 2)$ における接線の方程式，および法線の方程式を求めよ。

接線の方程式　$y=\boxed{アイ}x-\boxed{ウ}$

法線の方程式　$y=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}x+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$

2 点 $(2,\ 1)$ から曲線 $y=x^3-6x^2+6x+3$ に引いた接線の方程式を求めよ。また，求めた接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の座標を求めよ。

接線の方程式　$y=\boxed{クケ}x+\boxed{コ}$

接点以外の共有点の座標　$\left(\boxed{サ},\ \boxed{シス}\right)$

PART2　接線の方程式

2 (1) 曲線 $y=x^3-5x+1$ 上の点 A(2, −1) における接線の方程式，および法線の方程式を求めよ。

(2) 点 (1, 8) から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ。また，求めた接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の座標を求めよ。

(1) $f(x)=x^3-5x+1$ とおくと　$f'(x)=3x^2-5$

点 A における接線の傾きは　$f'(2)=7$　　法線の傾きは $-\dfrac{1}{7}$

よって，求める接線の方程式は

$$y=7(x-2)-1 \quad \text{すなわち} \quad y=7x-15$$

法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{7}(x-2)-1 \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{7}x-\frac{5}{7}$$

(2) $f(x)=x^3-x^2-8x+8$ とおくと　$f'(x)=3x^2-2x-8$

接点の座標を $(a,\ a^3-a^2-8a+8)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=3a^2-2a-8$

よって，接線の方程式は

$$y=(3a^2-2a-8)(x-a)+a^3-a^2-8a+8$$

すなわち　$y=(3a^2-2a-8)x-2a^3+a^2+8$ …… ①

①が点 (1, 8) を通るので

$$8=3a^2-2a-8-2a^3+a^2+8 \qquad a^3-2a^2+a+4=0 \qquad (a+1)(a^2-3a+4)=0$$

$$a^2-3a+4=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0 \quad \text{より} \quad a=-1$$

したがって，求める接線の方程式は，①より　$y=-3x+11$

この接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の x 座標は，方程式

$$x^3-x^2-8x+8=-3x+11$$

の $x=-1$ 以外の実数解である。

$$x^3-x^2-5x-3=0 \qquad (x+1)(x^2-2x-3)=0 \qquad (x+1)^2(x-3)=0 \qquad x=-1,\ 3$$

よって，求める共有点の座標は (3, 2)

第 14 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：-4，ウ：2，エ：1，オ：4，カ：9，キ：4

[解説]

$f(x)=-2x^3-x^2+1$ とおくと

$$f'(x)=-6x^2-2x$$

点 A における接線の傾きは　$f'(-1)=-4$

法線の傾きは　$\frac{1}{4}$

よって，求める接線の方程式は

$$y=-4\{x-(-1)\}+2$$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{y=-4x-2}$

法線の方程式は

$$y=\frac{1}{4}\{x-(-1)\}+2$$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}}$

[A]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における
接線の方程式
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$
法線の方程式
$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$
ただし，$f'(a)\neq 0$

2

[正解] **クケ**：-3，**コ**：7，**サ**：4，**シス**：-5

[解説]

$f(x)=x^3-6x^2+6x+3$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12x+6$$

接点の座標を $\left(a,\ a^3-6a^2+6a+3\right)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=3a^2-12a+6$ [B]

よって，接線の方程式は [A]

$$y=\left(3a^2-12a+6\right)(x-a)+a^3-6a^2+6a+3$$

すなわち

$$y=\left(3a^2-12a+6\right)x-2a^3+6a^2+3 \quad \cdots\cdots ①$$

①が点 $(2,\ 1)$ を通るから

$$1=\left(3a^2-12a+6\right)\cdot 2-2a^3+6a^2+3$$

$$2a^3-12a^2+24a-14=0$$

$$a^3-6a^2+12a-7=0$$

$$(a-1)\left(a^2-5a+7\right)=0$$

$a^2-5a+7=\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より

$$a=1$$

よって，求める接線の方程式は，①より

$$\boldsymbol{y=-3x+7}$$

この接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の x 座標は，方程式

$$x^3-6x^2+6x+3=-3x+7$$

の $x=1$ 以外の実数解である。

$$x^3-6x^2+9x-4=0$$

$$(x-1)^2(x-4)=0$$

よって　$x=1,\ 4$

$f(4)=4^3-6\cdot 4^2+6\cdot 4+3=-5$ より，

求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(4,\ -5)}$

[B]　接点の座標を $(a,\ f(a))$ とおき，接線の方程式を a を用いて表す。